第三次小测答案

2020年5月18日

Solution 1.

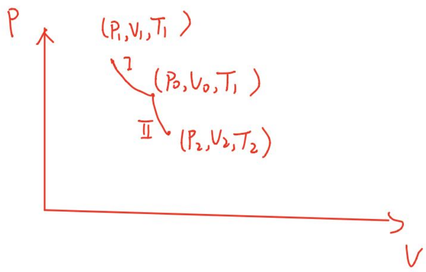

图 1: 第一题

如图1所示，由等温过程 I 和绝热过程 II 可以求出熵变。

(1)等温过程：

$$\begin{aligned} \text{đ}Q &= dU + pdV = pdV \\ \Rightarrow \Delta S &= \int \frac{pdV}{T} = \frac{1}{T_1}\int pdV \end{aligned} \tag{1}$$

由于等温过程中$p_1V_1 = pV \equiv Const$. 所以

$$\Delta S = \frac{1}{T_1}p_1V_1 \ln\frac{V_0}{V_1} \tag{2}$$

考虑到$p_0V_0^\gamma = p_2V_2^\gamma$和$p_1V_1 = p_0V_0$，有：

$$V_0^{\gamma-1} = \frac{p_2V_2^\gamma}{p_1V_1} \tag{3}$$

所以

$$\Delta S = \frac{p_1V_1}{T_1}\left(\frac{1}{\gamma-1}\ln\frac{p_1}{p_2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{V_2}{V_1}\right) \tag{4}$$

(2)绝热过程：$\text{đ}Q = TdS = 0$. 所以绝热过程熵变为0.

所以总熵变为：$\Delta S = \frac{p_1V_1}{T_1}(\frac{1}{\gamma-1}\ln\frac{p_1}{p_2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{V_2}{V_1})$. （或写成$\Delta S = \frac{p_1V_1}{T_1}\ln(\frac{p_1}{p_2}(\frac{T_2}{T_1})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}) = \frac{p_1V_1}{T_1}\ln(\frac{V_2}{V_1}(\frac{T_2}{T_1})^{\frac{1}{\gamma-1}})$）

2.

(1)对应一个可逆循环过程，熵变总是为0.所以系统总熵变为0. 这里的系统视为高低温物体两个物体以及热机。

(2) 若通过热接触达到热平衡，则：设末态共同温度为T_c. 有：

$$\begin{aligned}C(T_1-T_c)&=C(T_c-T_2)\\ \Rightarrow T_c&=\frac{T_1+T_2}{2}\end{aligned}\tag{5}$$

所以熵差：

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2=\int_{T_1}^{T_c}\frac{CdT}{T}+\int_{T_2}^{T_c}\frac{CdT}{T}=C\ln\frac{T_c}{T_1}+C\ln\frac{T_c}{T_2}=C\ln\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}\tag{6}$$

3.

$$\begin{aligned}\sigma^2(v)&=\int f(v)(v-\bar{v})^2dv=\int 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2(v^2+\bar{v}^2-2v\bar{v})dv\\ &=I_1+I_2+I_3\end{aligned}\tag{7}$$

其中，I_1,I_2,I_3分别对应于上述积分的v^2,v^3,v^4项。使用书上**表4.3**可得：

$$\begin{aligned}I_1&=4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}\bar{v}^2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{(\frac{m}{2kT})^3}}=4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}\frac{8kT}{\pi m}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{(\frac{m}{2kT})^3}}=4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}(\frac{2kT}{m})^2\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}\\ I_2&=-2\cdot4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}\bar{v}\frac{1}{2(\frac{m}{2kT})^2}=-4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}(\frac{2kT}{m})^2\\ I_3&=4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{(\frac{m}{2kT})^5}}=4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}\frac{3}{8}(\frac{2kT}{m})^2\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}\end{aligned}\tag{8}$$

相加即可得：

$$\begin{aligned}\sigma^2(v)&=4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}(\frac{2kT}{m})^2(\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}+\frac{3}{8})\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}\\ &=\frac{8kT}{m}(\frac{3}{8}-\frac{1}{\pi})\end{aligned}\tag{9}$$

也可以更简单的利用公式：

$$\sigma(v^2)=E(v^2)-(E(v))^2=\bar{v^2}-(\bar{v})^2=\frac{3kT}{m}-(\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}})^2=\frac{kT}{m}(3-\frac{8}{\pi})\tag{10}$$

4.葛正权实验

(1)根据书上式(4.2.47)知，从小孔流出的分子束强度为

$$I(v)=\frac{1}{4}n\cdot4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}v^3e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\tag{11}$$

所以从小孔泄流出的速率分布为$F(v)=\frac{1}{\Gamma}I(v)$

那么在某一个小的速度区间$v-v+dv$中的分子数为$F(v)dv$，假设这些分子全都沉积在圆筒壁上，而沉积长度分布设为$g(L)$。那么有$F(v)dv=g(L)dL$.

根据不同弧长处的分子速率分布为：

$$L=\frac{D^2\omega}{2v}\tag{12}$$

可以得到：

$$\begin{aligned} g(L) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}} 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} |\frac{dv}{dL}| \\ &= \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} (\frac{D^2\omega}{2})^4 L^{-5} e^{-\frac{m}{2kT}(\frac{D^2\omega}{2})^2 L^{-2}} \end{aligned} \tag{13}$$

(2)最可几：$\frac{\partial g(L)}{\partial L} = 0.$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} (\frac{D^2\omega}{2})^4 (-5L^{-6} + L^{-5}(-\frac{m}{2kT}(\frac{D^2\omega}{2})^2) L^{-3} \cdot (-2)) e^{-\frac{m}{2kT}(\frac{D^2\omega}{2})^2 L^{-2}} = 0 \\ \Rightarrow L = \sqrt{\frac{2m}{10kT}} \frac{D^2\omega}{2} = \frac{D^2\omega}{2v_p} \\ \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{5kT}{m}} \end{aligned} \tag{14}$$

5.二维Maxwell分布

(1)根据能量均分定理，二维气体分子只有2个平动自由度，所以

$$\bar{\epsilon_k} = 2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT \tag{15}$$

然后，

$$\begin{aligned} \frac{df(v^2)}{f(v^2)dv^2} &= \frac{df(v_x)}{f(v_x)dv_x^2} = -\beta \\ f(\mathbf{v}) &= Ce^{-\beta(v_x^2+v_y^2)} \end{aligned} \tag{16}$$

由归一化条件，

$$\begin{aligned} C \int\int e^{-\beta(v_x^2+v_y^2)} dv_x dv_y = 1 \\ C = \frac{\beta}{\pi} \end{aligned} \tag{17}$$

所以，

$$\begin{aligned} kT = \frac{1}{2} m\bar{v^2} &= \frac{1}{2} m \frac{\beta}{m} \int\int (v_x^2 + v_y^2) e^{-\beta(v_x^2+v_y^2)} dv_x dv_y \\ &= \frac{1}{2} m \frac{1}{\beta} \\ &= \frac{m}{2\beta} \end{aligned} \tag{18}$$

所以速度分布律为：

$$f(\mathbf{v})d\mathbf{v} = f(v_x, v_y) dv_x dv_y = \frac{m}{2\pi kT} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2)} dv_x dv_y \tag{19}$$

速率分布律为：

$$f(v)dv = \frac{m}{kT} e^{-\frac{m}{2kT}v^2} v dv \tag{20}$$

(2)在$d\mathbf{v}_1, d\mathbf{v}_2$处找到1，2粒子的概率为：

$$dW = dW_1 dW_2 = \frac{m_1}{2\pi kT} e^{-\frac{m_1}{2kT}v_1^2} d\mathbf{v_1} \frac{m_2}{2\pi kT} e^{-\frac{m_2}{2kT}v_2^2} d\mathbf{v_2} = \frac{m_1}{2\pi kT}\frac{m_2}{2\pi kT} e^{-\frac{1}{kT}(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2)} d\mathbf{v_1} d\mathbf{v_2} \tag{21}$$

我们可以把以上两个分子的运动分解成质心运动和相对运动，设$\mathbf{v}_c$为质心速度，$\mathbf{v}_0$为相对运动速度。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_c &= \frac{m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2}}{m_1+m_2}, \\ \mathbf{v_0} &= \mathbf{v_2} - \mathbf{v_1} \\ \Rightarrow \mathbf{v_1} &= \mathbf{v_c} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v_0}, \mathbf{v_2} = \mathbf{v_c} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v_0} \end{aligned} \tag{22}$$

而且由于动能守恒，有：

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}M v_c^2 + \frac{1}{2}\mu v_0^2 \tag{23}$$

其中,

$$\begin{aligned} M =& m_1 + m_2 \\ \mu =& \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \\ \Rightarrow & M\mu = m_1 m_2 \end{aligned} \tag{24}$$

则由积分变换：

$$d\mathbf{v_1} d\mathbf{v_2} = |J| d\mathbf{v_0} d\mathbf{v_c} \tag{25}$$

其中J是雅各比行列式。

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{v_1}}{\partial \mathbf{v_c}} & \frac{\partial \mathbf{v_1}}{\partial \mathbf{v_0}} \\ \frac{\partial \mathbf{v_2}}{\partial \mathbf{v_c}} & \frac{\partial \mathbf{v_2}}{\partial \mathbf{v_0}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{m_2}{m_1+m_2} \\ 1 & \frac{m_1}{m_1+m_2} \end{vmatrix} = -1$$

所以

$$dW = \frac{M}{2\pi kT}\frac{\mu}{2\pi kT} e^{-\frac{1}{kT}(\frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\mu v_0^2)} d\mathbf{v_c} d\mathbf{v_0} = \frac{M}{2\pi kT} e^{-\frac{M}{2kT}v_c^2} d\mathbf{v_c} \cdot \frac{\mu}{2\pi kT} e^{-\frac{\mu}{2kT}v_0^2} d\mathbf{v_0} \tag{26}$$

以上概率分布可以视为相对运动的概率分布和质心运动概率分布的组合(注意到它们已经归一化了)，所以相对运动速度的概率分布为：

$$dW_0(\mathbf{v_0}) = \frac{\mu}{2\pi kT} e^{-\frac{\mu}{2kT}v_0^2} d\mathbf{v_0} \tag{27}$$

速率分布为

$$dW_0(v_0) = 2\pi \frac{\mu}{2\pi kT} e^{-\frac{\mu}{2kT}v_0^2} v_c dv_0 \tag{28}$$

平均速度为：

$$\bar{v}_0 = 2\pi \frac{\mu}{2\pi kT} \int_0^\infty e^{-\frac{\mu}{2kT}v_0^2} v_0 \cdot v_0 dv_0 = 2\pi \frac{\mu}{2\pi kT} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{(\frac{\mu}{2kT})^3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{\pi kT}{2\mu}} \tag{29}$$

若两粒子质量相同，则可以发现相对运动的平均速率是单个粒子平均速率的$\sqrt{2}$倍。

6.泄流分离法

$$\begin{aligned} \frac{n_1'}{n_2'} &= \frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1\bar{v}_1}{n_2\bar{v}_2} = \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \\ \Rightarrow (\frac{n_1}{n_2})_f &= \frac{n_1}{n_2}(\sqrt{\frac{m_2}{m_1}})^m \\ \Rightarrow m &= 1505.7 \simeq 1506 \end{aligned} \tag{30}$$

7.$T-S$图上的热机效率

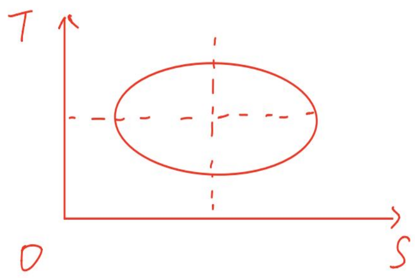

图 2: 第七题

根据T-S线的方程：$\frac{(S-2S_0)^2}{S_0^2}+\frac{(T-2T_0)^2}{T_0^2}=1$.可知，此过程对外做功为：

$$W = \oint pdV = \oint (dU - TdS) = -\oint TdS = S_{loop} = \pi T_0 S_0 \tag{31}$$

其中，循环过程中，系统内能不变。

此过程系统从外界的吸热为：

$$Q_{absorbed} = \int_{upperline} \text{đ}Q = \int_{upperline} TdS = 4T_0S_0 + \frac{1}{2}\pi T_0 S_0 \tag{32}$$

因此，此过程效率为：

$$\eta = \frac{W}{Q_{absorbed}} = \frac{\pi}{4+\frac{\pi}{2}} \simeq 0.564 \tag{33}$$

8.黑洞热力学

(1)

$$\begin{aligned} T &= \frac{\hbar g}{2\pi ck} \\ g &= \frac{GM}{R_S^2} = \frac{GMc^4}{4G^2M^2} = \frac{c^4}{4GM} \\ \Rightarrow T &= \frac{\hbar c^3}{8\pi Gk}\cdot\frac{1}{M} \end{aligned} \tag{34}$$

这里使用了Schwartz半径公式$R_S=\frac{2GM}{c^2}$

Hint:以上就是Hawing radiation的黑洞温度。实际上是S.Hawking先提出了霍金辐射之后再定义了温度。

(2)

$$
\begin{aligned}
&dE = c^2 dM = TdS \\
&\Rightarrow dS = \frac{c^2}{T} dM = \frac{Mc^2}{\frac{\hbar c^2}{8\pi Gk}} dM \\
&\Rightarrow S = \int_0^M \frac{Mc^2}{\frac{\hbar c^2}{8\pi Gk}} dM = \frac{4\pi GkM^2}{\hbar c} = \frac{Akc^3}{4\hbar G} = \frac{\hbar c^5}{16\pi GkT^2}
\end{aligned} \tag{35}
$$

(3)

$$
\frac{dE}{dT} = \frac{d(Mc^2)}{dT} = -\frac{c^2}{T^2} \cdot \frac{\hbar c^3}{8\pi Gk} < 0 \tag{36}
$$

由此可见黑洞的热容为负。对于这样的体系，根据热力学平衡条件，不可能处于一个稳定的热平衡状态。因为如果温度稍微降低，能量会变大，体系会从外界吸热，从而进一步降低其温度，越来越偏离平衡态。

Hint:由热力学的熵增原理可以给出热力学平衡条件(详见任一本热力学教材)：

$$
\begin{aligned}
&C_V > 0 \\
&(\frac{\partial p}{\partial V})_T < 0
\end{aligned} \tag{37}
$$

9.黑体辐射模型

(1) 考虑单位时间单位面元dA的能量通量。

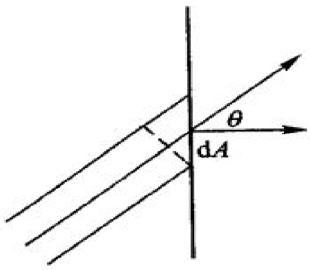

图 3: 第九题

对于一个简单情形：若所有能流方向与dA法向平行，那么很容易得到辐射能量为$dE = udV = ucdtdA$。

由于辐射的传播方向为各向同的，所以在立体角元$d\Omega$内的辐射能量密度为$u' = \frac{d\Omega}{4\pi}u$。假设平面电磁波与面元的法向夹角为$\theta$，则这个角度的内能能流在$dA$法向的贡献应将体元$dV$修正为$dV' = dV\cos\theta$。所以，单位时间（$dt = 1$）通过面元的能量为$dE = u'dV' = u'dsdA\cos\theta = \frac{d\Omega}{4\pi}uc\cos\theta dA$。

而总的通过dA法向的能量为上述能量元的求和（或积分），所以：

$$
\begin{aligned}
dE_{total} = J_u dA &= \int dE = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{uc}{4\pi} \cos\theta dA \\
&= \frac{cudA}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi
\end{aligned} \tag{38}
$$

对比可得：

$$J_u = \frac{1}{4}cu \tag{39}$$

这里考虑的是流出的能量，所以对θ的积分只用积上半球。

(2)根据能量密度定义$U = uV$，

$$\begin{aligned}(\frac{\partial U}{\partial V})_T &= T(\frac{\partial p}{\partial T})_V - p \\ \Rightarrow u &= T\frac{1}{3}\frac{du}{dT} - \frac{u}{3}\end{aligned} \tag{40}$$

求解这个微分方程，可以得到：

$$u = aT^4 \tag{41}$$

这里，a是常数。带入第一问中，可以得到：

$$J_u = \frac{1}{4}cu = \frac{1}{4}caT^4 \equiv \sigma T^4 \tag{42}$$

其中，$\sigma = \frac{1}{4}ca$。

(3)根据热力学基本方程$dS = \frac{dU+pdV}{T}$，可以得到：

$$\begin{aligned}dS &= \frac{ad(T^4V) + \frac{1}{3}aT^4dV}{T} = a(T^3dV + 4T^2VdT + \frac{1}{3}T^3dV) = 4a(\frac{1}{3}T^3dV + VT^2dT) \\ &= \frac{4a}{3}d(T^3V)\end{aligned} \tag{43}$$

由于体积为0时，没有辐射场，所以从零积分时，积分常数不存在(也可以从热力学第三定律考虑，0K时绝对熵恒为0)。所以：

$$S = \frac{4aT^3V}{3} \tag{44}$$

所以，

$$G = U - TS + pV = aT^4V - \frac{4aT^4V}{3} + \frac{aT^4V}{3} = 0 \tag{45}$$